

Fichas de los **modelos matemáticos**
donados por **Don Zoel García de Galdeano**
a la Facultad de Ciencias
de la Universidad de Zaragoza.

María Teresa Lozano Imízcoz
Dto. Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Abril 2011

Serie I nº 1

Superficie de rotación de la tractriz.



No conserva etiqueta original

Nombre original

Rotationsfläche der Tractrix

Información matemática

Es la superficie de revolución en torno al eje OZ de una tractriz situada en el plano XZ. Esta tractriz es la curva cuya tangente en cada punto corta al eje OZ a una distancia constante. Es la trayectoria que describe un objeto P arrastrado por otro Q que se desplaza a lo largo del eje OZ manteniendo con él una distancia constante.

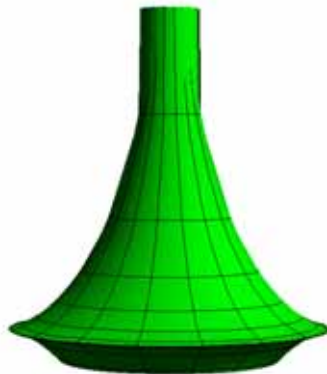
La ecuación de la superficie en paramétricas es:

$$x = \cos u \operatorname{sen} v$$

$$y = \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$$

$$z = \cos v + \ln(\tan(v/2))$$

Dibujada con Mathematica



Serie II, Nr 1a)

Superficie de Kummer.



Etiqueta original

Kummer'sche Fläche

Verl. V. I. Brill.

2.Ser. Nr. VIa.

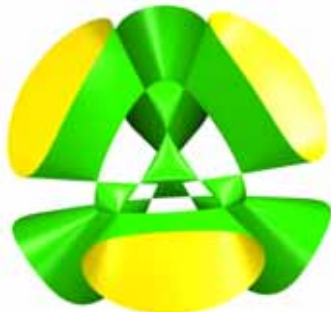
Información matemática

Una superficie de Kummer es una cuártica (superficie algebraica de grado 4) con 16 puntos dobles ordinarios. En este caso tiene los 16 puntos dobles. Existen 16 planos tal que cada uno de ellos pasa por 6 puntos dobles y cada uno de los 16 puntos dobles pertenece a 6 de estos planos.

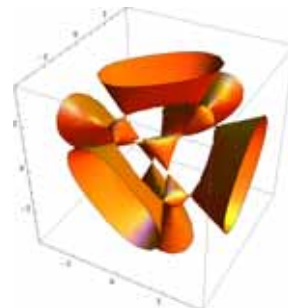
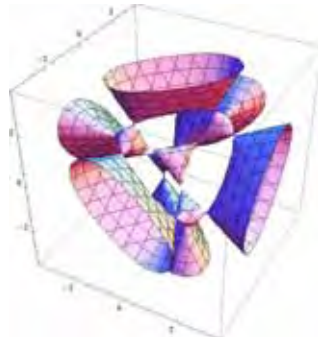
Su ecuación es

$$x^4 + y^4 + z^4 - 4x^2 - 4y^2z^2 - 4y^2 - 4z^2x^2 - 4z^2 - 4x^2y^2 + 12\sqrt{3}xyz + 1 = 0$$

Surfer:



Mathematica:



Serie III nº 4

Elipsoide



Etiqueta original

Ellipsoid.

3. Serie, Nr. 4.

Verl. V. Martin Schilling, Halle a. S.

Información matemática

La ecuación de esta superficie es

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 1$$

Las líneas impresas son líneas de curvatura (máxima y mínima) de la superficie.

Surfer



Serie III nº 9

Hiperboloide de dos hojas con líneas de curvatura



No conserva la etiqueta original

Su nombre original es

Zweischaliges Hyperboloid mit Krümmungslinien

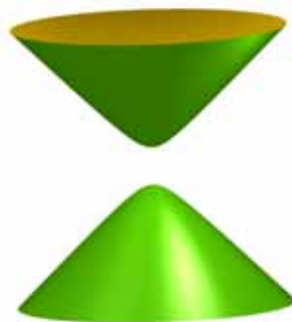
Información Matemática:

La ecuación de esta superficie es

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} - \frac{z^2}{C} = -1$$

Las líneas impresas son líneas de curvatura (máxima y mínima) de la superficie.

Surfer



Serie III nº 12

Paraboloide elíptico



Etiqueta:

Elliptisches Paraboloid.
3. Serie Nr. 12
Ver. V. Martin Schilling, Halle a. S.

Información Matemática:

La ecuación de esta superficie es

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + 2z = 0$$

Las líneas impresas son líneas de curvatura (máxima y mínima) de la superficie.

Surfer



Serie V nº 2 a
Superficie de revolución con curvatura constante positiva.
Esfera



Sin etiqueta original

Nombre original

Serie V, Nr 2a
 Rotationsflächen von constantem positiven Krümmungsmass. Kugel.

Información Matemática:

La ecuación de esta superficie es

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Surfer



Serie V, Nr 4
Helicoide generalizado con curvatura constante positive.



Sin etiqueta original.

Título original

Schraubenflächen von constantem negativen Krümmungsmass.

Información matemática

El helicoide generalizado está generado por una curva plana que gira en torno a un eje a la vez que avanza en la dirección del eje con velocidad constante. En este caso la curva generatriz es la Tractriz. La superficie tiene curvatura constante negativa.

Serie VI nº 6 a
Curva espacial cúbica sobre un cilindro elíptico:
elipse cúbica.



Etiqueta original

Raumcurve 3. Ordnung.

6 Ser. XIX a

Información matemática

Sobre un cilindro elíptico (superficie de orden 2) de ecuación

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1,$$

Se dibuja la curva intersección con un cono (superficie de orden 2) de ecuación

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

El resultado es una curva espacial: la elipse cúbica.

Surfer:



Serie VI nº 6 b
Curva espacial cúbica sobre un cilindro hiperbólico:
hipérbola cúbica.



Sin etiqueta original

Título

Raumcurve 3. Ordnung.

Verl. V. L. Brill. 6. Ser. Nr. XIX c.

Información matemática

Sobre un cilindro hiperbólico (superficie de orden 2) de ecuación

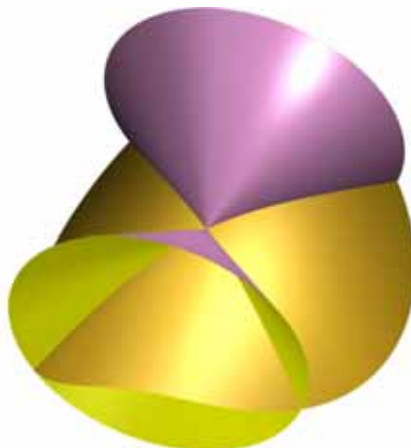
$$x^2 - y^2 = 1$$

Se dibuja la curva intersección con un cono (superficie también de orden 2) de ecuación

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

El resultado es una curva espacial de orden 3: la hipérbola cúbica.

Surfer



Serie VI nº 6 c

Curva espacial cúbica sobre un cilindro parabólico: parábola cúbica.



Etiqueta original

Raumcurve 3. Ordnung.

Verl. V. L. Brill. 6. Ser. Nr. XIX c.

Información matemática

Sobre un cilindro parabólico (superficie de orden 2) de ecuación

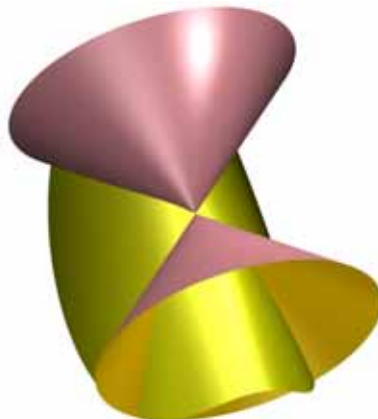
$$x^2 - y = 0$$

Se dibuja la curva intersección con un cono (superficie también de orden 2) de ecuación

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

El resultado es una curva espacial de orden 3: la parábola cúbica.

Surfer



Serie VI n° 6 d
Curva espacial cúbica sobre un cilindro parabólico:
elipse cúbica.



Etiqueta original

Raumcurve 3. Ordnung.

Verl. v. L. Brill 6 Ser. XIX a

Información matemática

Sobre un cilindro parabólico (superficie de orden 2) de ecuación

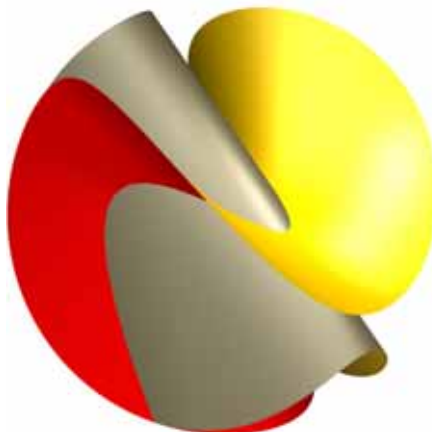
$$x^2 - y = 0$$

Se dibuja la curva intersección con un paraboloides hiperbólico de ecuación

$$x^2 - y^2 - z = 0$$

El resultado es una curva espacial: la parábola hiperbólica-cúbica.

Surfer:



Serie VII, Nr 2

Superficie de Cayley



La figura está incompleta, le falta una pieza central. (Ver un modelo restaurado en la foto pequeña).

Etiqueta original

Fläche dritter Ordnung.

Verl. V. L. Brill. 2. Ser. Nr. VII.

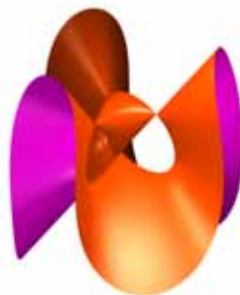
Información matemática

Es una cúbica con 4 puntos singulares (nodos) que están dispuestos como los vértices de un tetraedro. Los lados de este tetraedro son 6 de las 9 rectas reales contenidas en la superficie. Las otras 3 están en un plano horizontal.

Una ecuación es:

$$-5(x^2 y + x^2 z + y^2 x + y^2 z + z^2 y + z^2 x) + 2(x y + x z + y z) = 0$$

Surfer



Serie VII, Nr 16
Superficie de orden 3 con un punto singular U_6 .



Sin etiqueta original

Nombre original

Fl. 3. Ord. mit unipl. Knotenpunkt U_6 .

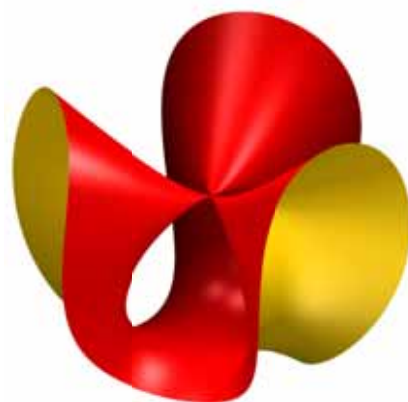
Información matemática

Superficie de orden 3 con un punto singular U_6 cuyo plano tangente interseca a la superficie en 3 rectas, dibujadas en rojo.

Una ecuación de esta superficie es:

$$z^2(z+4) + y(y-\sqrt{3}x)(y+\sqrt{3}x) = 0$$

Surfer



Serie VII, Nr 17
Superficie de orden 3 con un punto singular U_6 .



Etiqueta original,

Fl. 3, Ord. Mit unipl. Knotenpunkt U_6 .

7 Serie, Nr. 17.

Verl. V. Martin Schilling, Halle a. S.

Información matemática

Superficie de orden 3. Tiene un punto singular de tipo U_6 y dos rectas reales, dibujadas en el modelo. La recta roja es la intersección con el plano tangente en el punto U_6 . Su ecuación es

$$z^3 + 4z^2 + yx^2 + y^3 = 0$$

Surfer:



Serie VII, Nr 18
Superficie de orden 3 con un punto singular U_7 .



Etiqueta original,

Fl. 3, Ord. Mit unipl. Knotenpunkt U_7 .

7 Serie, Nr. 18.

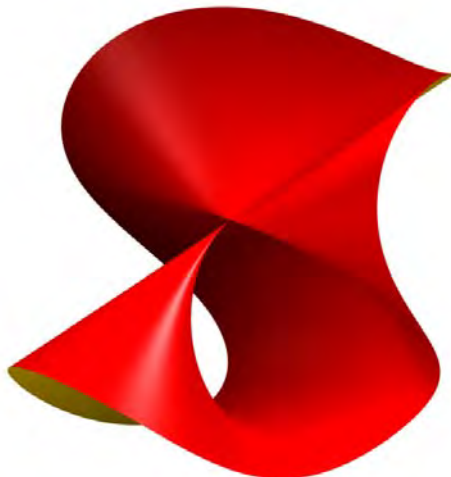
Verl. V. Martin Schilling, Halle a. S.

Información matemática

Superficie de orden 3. Tiene un punto singular de tipo U_7 y tres rectas reales, dibujadas en el modelo. Su ecuación es

$$x^3 + 4x^2 + y^2z + xz^2 = 0$$

Surfer:



Serie VII n° 19
Superficie de orden 3 con un punto singular U_8 .



Etiqueta original

Fl. 3. Ord. mit unipl. Knotenpunkt U_8 .

7. Serie, Nr. 19.

Verl. V. Martin Schilling, Halle a. 8.

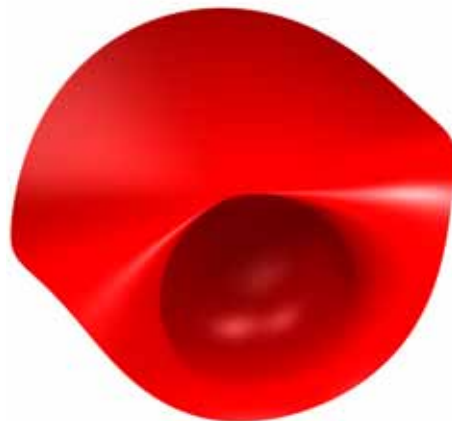
Información matemática

Tiene un único punto singular y una sola recta real.

Una ecuación es:

$$z^2(z+4)+y^2z+x^3=0$$

Sufer:



Serie VII, Nr 20

Superficie reglada de orden 3.



Etiqueta original,

Regelfläche 3. Ordnung.

7 Serie, Nr. 20.

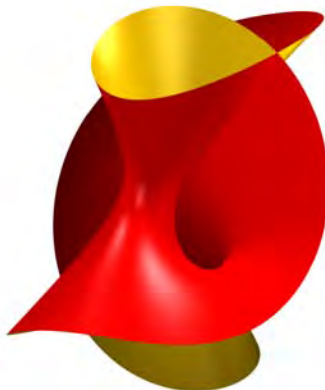
Verl. V. Martin Schilling, Halle a. S.

Información matemática

Superficie de orden 3. Es una superficie reglada con una línea de puntos dobles.

Su ecuación es $y^3 + y^2z + yx^2 - 2xy - zx^2 = 0$

Surfer:



Serie VII, Nr 21

Superficie reglada de orden 3.



Etiqueta original,

Regelfläche 3. Ordnung.

7 Serie, Nr. 21.

Verl. V. Martin Schilling, Halle a. S.

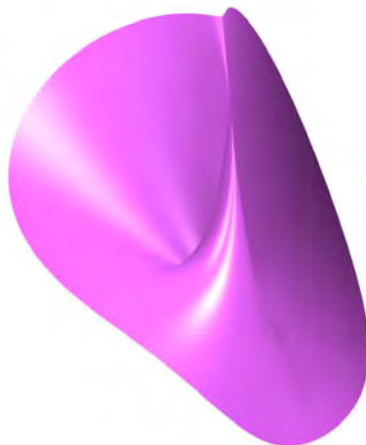
Información matemática

Superficie de orden 3. Es una superficie reglada con un segmento de la línea de puntos dobles limitado por dos puntos cuspidales reales finitos.

Su ecuación es

$$y^3 + y^2z + yx^2 - 2xy + zx^2 + xyz = 0$$

Surfer:



Serie VII, Nr 22

Superficie reglada de Cayley de orden 3.



Etiqueta original,

Regelfläche 3. Ordnung.

7 Serie, Nr. 22.

Verl. V. Martin Schilling, Halle a. S.

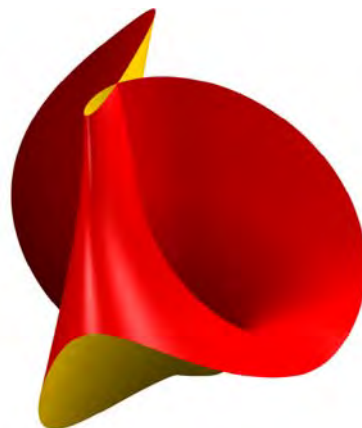
Información matemática

Superficie de orden 3. Es una superficie reglada con un punto cuspidal impropio y una línea de puntos dobles.

Su ecuación es

$$y^3 + x^2z + yx = 0$$

Surfer:



Serie VII, Nr 23

Superficie reglada de Cayley de orden 3.



Al modelo le falta la parte superior (ver un modelo restaurado en la foto pequeña).

Etiqueta original,

Regelfläche 3. Ordnung.

7 Serie, Nr. 23.

Verl. V. Martin Schilling, Halle a. S.

Información matemática

Superficie de orden 3. Es una superficie reglada con un punto cuspidal y una línea de puntos dobles.

Su ecuación es $y^3 + x^2 + xyz = 0$

Surfer:



Serie VII, Nr 24a
Superficie de orden 3.
Hessiana de la superficie del modelo VII 2.



La figura está incompleta, le falta una pieza central. (Ver un modelo restaurado en la foto pequeña).

Etiqueta original,

Hesse'sche Fl. Einer Fl. 3. Ord.

7 Serie, Nr. 24u.

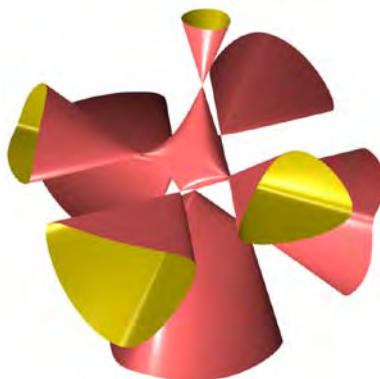
Verl. V. Martin Schilling, Halle a. S.

Información matemática

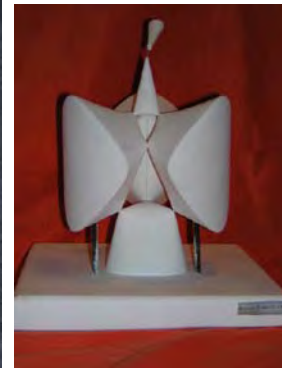
La superficie Hessiana de una superficie S en el espacio proyectivo dada por un polinomio $f(x_1, x_2, x_3, x_4)=0$ es la superficie definida por el determinante de la matriz Hessiana de f . En este caso S es la superficie de Cayley del modelo VII2 y la ecuación es

$$25(x^3(y+z)+y^3(x+z)+z^3(x+y))+50(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2)-125(x^2yz+y^2xz+z^2xy)+60xyz-4(xy+xz+yz)=0$$

Surfer:



Serie VII, Nr 25
Superficie de orden 3.
Hessiana de la superficie del modelo VII 7.



La figura está incompleta, le falta una pieza central. (Ver un modelo restaurado en la foto pequeña).

Etiqueta original,

Hesse'sche Fl. Einer Fl. 3. Ord.

7 Serie, Nr. 25.

Verl. V. Martin Schilling, Halle a. S.

Información matemática

La superficie Hessiana de una superficie S en el espacio proyectivo dada por un polinomio $f(x_1, x_2, x_3, x_4)=0$ es la superficie definida por el determinante de la matriz Hessiana de f . En este caso S es la superficie de Cayley del modelo VII7 y la ecuación es

$$25056-60534 x^2+6237 x^3-60534 y^2-18711 x y^2-14544 z+50805 x^2 z+27 x^3 z+50805 y^2 z-81 x y^2 z-3336 z^2-8103 x^2 z^2-8103 y^2 z^2+564 z^3+100 z^4=0$$

Surfer:



Serie X N°5

Ciclode de Dupin



Etiqueta original

Dupin'sche Cyclide.

Verl. V. L. Brill. 10. Ser. 1. Nachtr. Nr. 5.

Información matemática

La ciclode de Dupin se obtiene de un toro por inversión en una esfera. Es un ejemplo de superficie de orden 4. En este caso el centro de inversión pertenece al toro de partida, de manera que el resultado contiene al punto del infinito. Se dice que es una ciclode toroidal parabólica.

La inversión del toro de ecuación

$$(R^2 - r^2 + (x - e)^2 + y^2 + z^2)^2 - 4 R^2((x - e)^2 + y^2) = 0$$

en la esfera unidad

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

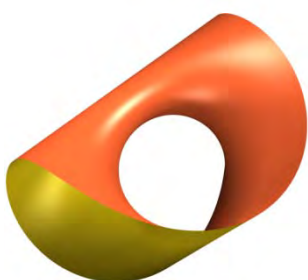
produce la ciclode.

$$\begin{aligned} &((x^2 + y^2 + z^2)(e^2 - r^2 + R^2) + 1 - 2ex)^2 \\ &- 4R^2((-e(x^2 + y^2 + z^2) + x)^2 + y^2) = 0 \end{aligned}$$

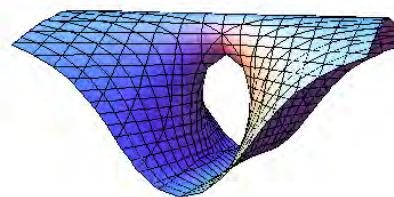
Si $R=2$, $r=1$, $e=1$ se tiene la ciclode de Dupin

$$1 - 4x - 12x^2 - 16y^2 + 8(x^2 + y^2 + z^2) + 16x(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

Surfer



Mathematica



Serie X N° 7

Superficie de ondas de un cristal



Etiqueta original

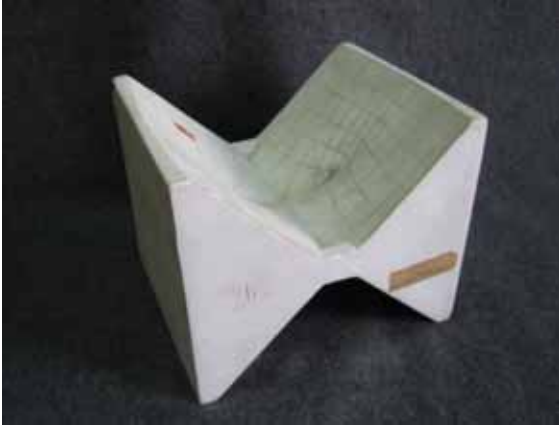
Wellenfläche für pos. Opt.einax. Kryst.
 10. Serie, Nr. 7.
 Verl. V. Martin Schilling, Halle a. S.

Información matemática

Superficie de onda de cristal óptico uniaxial con birrefringencia positiva, la relación de ejes corresponde aproximadamente al Cinabrio.

Serie XIV nº 1 a y b

Parte real e imaginaria de la función $w^2 = z^2 - 1$



Etiquetas originales

$$w^2 = z^2 - 1$$

14. Serie, Nr. 1a.

Verl. v. Martin Schilling, Halle a. S.

$$w^2 = z^2 - 1$$

14. Serie, Nr. 1b.

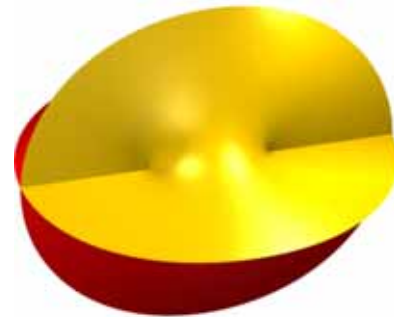
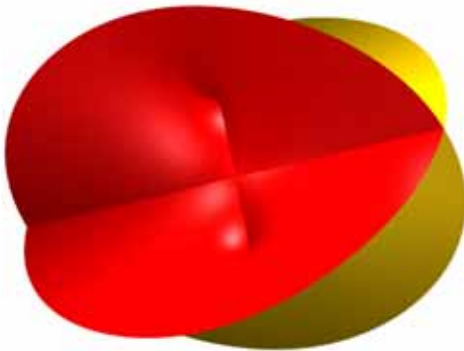
Verl. v. Martin Schilling, Halle a. S.

Información matemática:

Sea $w=u+iv$, $z=x+yi$.

La superficie 1a es $u^4 - x^2y^2 - x^2u^2 + y^2u^2 + u^2$

La superficie 1b es $x^2y^2 - v^2 - x^2v^2 + y^2v^2 + v^2$

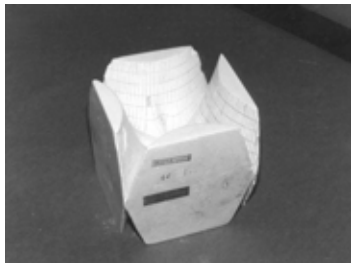


Serie XIV nº 2a y 2b

Parte real e imaginaria de la función $w^2 = z^4 - 1$



Es una cuarta parte de la figura original que ponemos a continuacion. Tiene simetría.



Etiquetas originales

No se conserva

$$w^2 = z^4 - 1$$

14. Serie, Nr. 2a.

Verl. v. Martin Schilling, Halle a. S.

$$w^2 = z^4 - 1$$

14. Serie, Nr. 2b.

Verl. v. Martin Schilling, Halle a. S.

Información matemática:

$$\text{Sea } w = u + iv, z = x + yi. \Rightarrow u^2 - v^2 + uvi = x^4 + y^4 - 6x^2y^2 + 4xy(x^2 - y^2) i - 1$$

La superficie 1a es

$$u^4 - 4x^6y^2 - 4x^2y^6 + 8x^4y^4 - x^4u^2 - y^4u^2 + 6x^2y^2u^2 + u^2$$



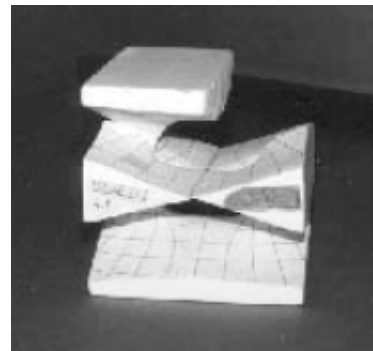
La superficie 1b es

$$-v^4 + 4x^6y^2 + 4x^2y^6 - 8x^4y^4 - x^4v^2 - y^4v^2 + 6x^2y^2v^2 + v^2$$



Serie XIV nº 3

Parte real (imaginaria) de la función $w^4 = z^2 - 1$



El modelo está incompleto. Es una parte de la figura original que está a continuación. Dada la simetría de la superficie, se mantiene la información.

No conserva la etiqueta original.

Información matemática

Es la función compleja $w^4 = z^2 - 1$, si $z = x + yi$, $w = u + iv$, $\Rightarrow u^4 + v^4 - 6u^2v^2 + 2(u^2 - v^2)uvi = x^2 - y^2 + 2xyi - 1$.

La parte real y la imaginaria tienen la misma ecuación de grado 16

$$16v^4 - 112v^8 + 128v^{12} + 256v^{16} - 48v^4x^2 + 224v^8x^2 - 128v^{12}x^2 + 48v^4x^4 - 112v^8x^4 - 16v^4x^6 + 48v^4y^2 - 224v^8y^2 + 128v^{12}y^2 - 40v^4x^2y^2 - 320v^8x^2y^2 - 8v^4x^4y^2 + 48v^4y^4 - 112v^8y^4 + 8v^4x^2y^4 + x^4y^4 + 16v^4y^6$$



Serie XIV nº 4

Parte real (imaginaria) de la función $w=1/z$



Etiqueta original

$$w = \frac{1}{z}$$

14. Serie, Nr. 4.

Verl. v. Martin Schilling, Halle a. S.

Información matemática

Es la función compleja $w=1/z$, si $z=x+yi$, $w=u+iv$, se obtiene

$$x-ux^2-uy^2 \qquad vx^2+y+vy^2$$

que es la misma superficie.

Surfer



Serie XIV nº 5a y nº 5b

Parte real e imaginaria de la función compleja $w = \frac{1}{2\epsilon} \ln \frac{z-\epsilon}{z+\epsilon}$



Etiquetas originales

$$w = \frac{1}{2\epsilon} \ln \frac{z-\epsilon}{z+\epsilon} \left(\epsilon = \frac{\pi}{4} \right).$$

14. Serie, Nr. 5a.

Verl. v. Martin Schilling, Halle a. S.

$$w = \frac{1}{2\epsilon} \ln \frac{z-\epsilon}{z+\epsilon} \left(\epsilon = \frac{\pi}{4} \right).$$

14. Serie, Nr. 5b.

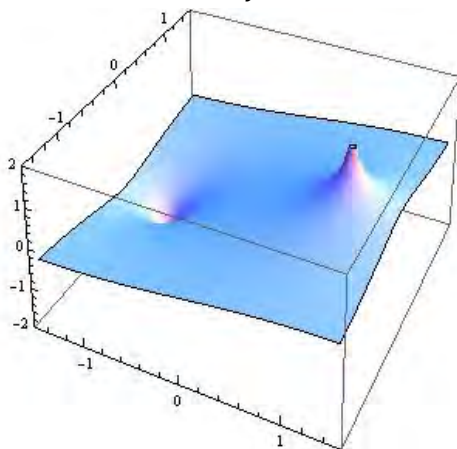
Verl. v. Martin Schilling, Halle a. S.

Información matemática:

Sea $w=u+iv$, $z=x+yi$.

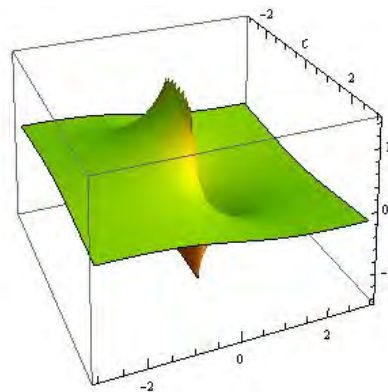
Parte real:

$$u = \frac{1}{4} \ln \frac{x^2 + y^2 + 2x + 1}{x^2 + y^2 - 2x + 1}$$



Parte imaginaria:

$$v = -\frac{1}{2} \operatorname{Arctan}(x^2 + y^2 - 1, 2y)$$



Dibujos hechos en Mathematica

Serie XIV nº 6

Parte real (imaginaria) de la función compleja $6w = e^{\frac{1}{6z}}$



Etiqueta original

$$w = e^{\frac{1}{6z}}$$

14. Serie, Nr. 6.

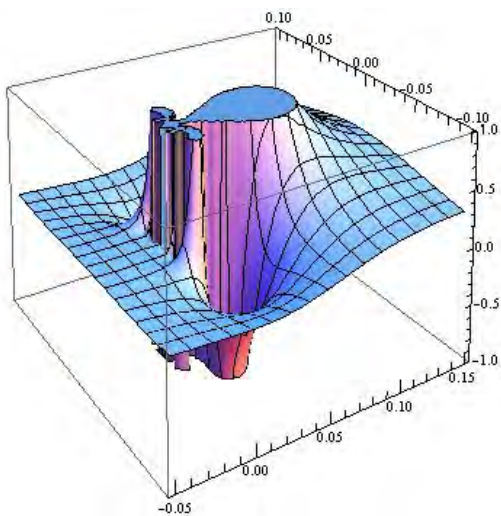
Verl. v. Martin Schilling,

Información matemática

Sea $w=u+iv$, $z=x+yi$.

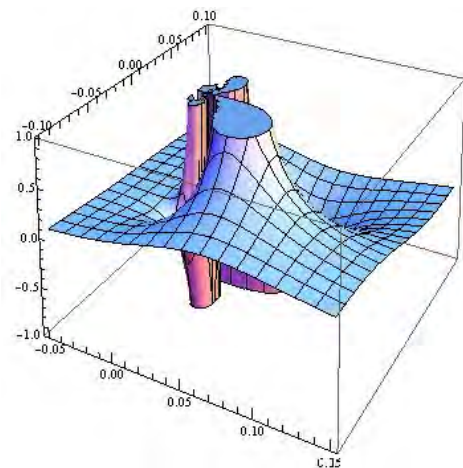
La ecuación que cumple la parte real u es:

$$u = \frac{1}{6} e^{\frac{x}{6x^2+6y^2}} \cos \frac{y}{6x^2+6y^2}$$



La ecuación de la parte imaginaria v es:

$$v = -\frac{1}{6} e^{\frac{x}{6x^2+6y^2}} \operatorname{sen} \frac{y}{6x^2+6y^2}$$



Dibujos hechos en Mathematica

Serie XVII n° 3b

Superficie con curvatura constante positiva.

Superficie de Sievert-Ennaper



Etiqueta original,

**Fläche von const. Posit. Krümm.-Mass
Mit einem System ebener Krümm.-Lin.**

II. Cycl. Typus.

Verl. V. L. Brill. 17. Ser. Nr. 3b.

Información matemática

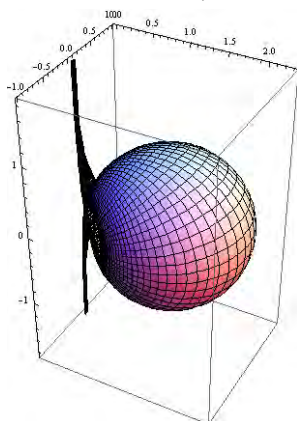
Es una superficie de curvatura constante positiva (como la esfera) que fue calculada por Sievert en su tesis bajo la dirección de Enneper en 1886. En un cuadrante están dibujadas las líneas de curvatura principales, las verticales son curvas planas contenidas en planos pasando por el eje coordenado vertical.

Una parametrización de esta superficie es (Weisstein, Eric W. "Sievert's Surface." From [MathWorld](#)):

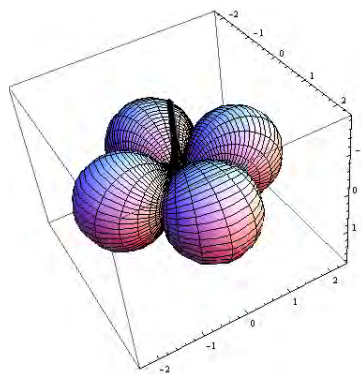
$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = \frac{\ln \left(\tan \left(\frac{\varphi}{2} \right) + 4a \cos v \right)}{2} \end{cases} \quad \text{donde} \quad \begin{cases} \varphi = -\frac{u}{2} + \arctan(2 \tan u), \\ a = \frac{2}{4 - 3 \sin^2 v \cos^2 u}, \\ r = a \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{1 + 3 \sin^2 u} \sin v \end{cases}$$

Con Mathematica:

$$-\pi/2 < u < \pi/2, \quad 0 < v < 2\pi$$



$$-2\pi < u < 2\pi, \quad 0 < v < 2\pi$$



Serie IV, Nr 2

Modelo para representar hiperboloides, paraboloides y superficies alabeadas

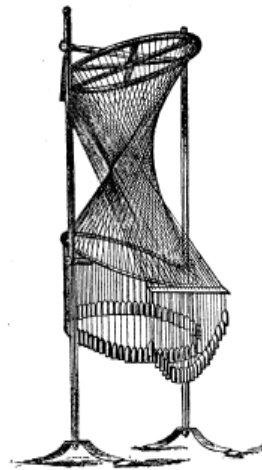


Información matemática

Manteniendo los dos círculos guía paralelos y girando el superior, los **hilos amarillos** son generatrices de hiperboloides reglados, con el cilindro y el cono como casos límite. Si la posición de los dos círculos guía es horizontal son hiperboloides de revolución. Cuando los círculos no son paralelos se obtienen superficies alabeadas de orden 4.

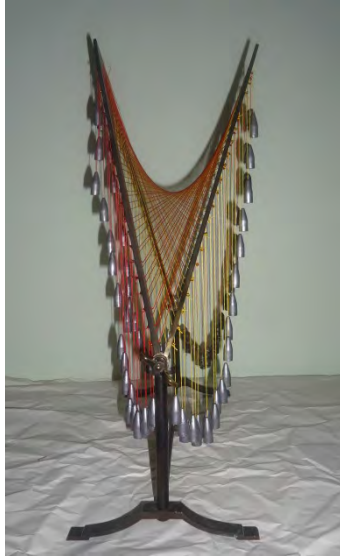
La superficie formada por **hilos rojos** contiene dos líneas tangentes a los círculos guía en puntos de la misma generatriz. Forma paraboloides con una generatriz en común con la superficie alabeada amarilla.

Dibujo en el Catálogo de Schilling (1903)



Serie IV, Nr 5

Modelo para representar paraboloides hiperbólicos



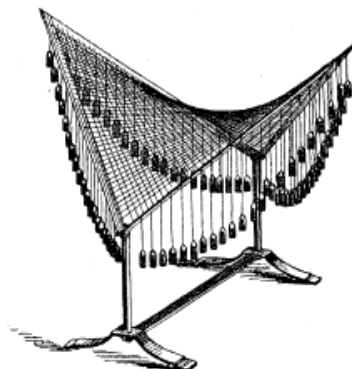
Información matemática

Moviendo los lados del cuadrilátero se obtienen todos los posibles paraboloides hiperbólicos, desde un plano hasta un doble plano con frontera parabólica.

Un paraboloide hiperbólico es una superficie cuadrática doblemente reglada. En coordenadas adecuadas tiene ecuación

$$\frac{z}{c} = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}$$

Dibujo del Catálogo de Schilling (1903)



Serie XIII, Nr 1

Superficie reglada de orden 4



No se conserva la etiqueta original.

Información matemática

Es una cuártica reglada con dos componentes congruentes y dos segmentos de rectas reales dobles y cuatro “pinchpoints” en cada una de ellas.

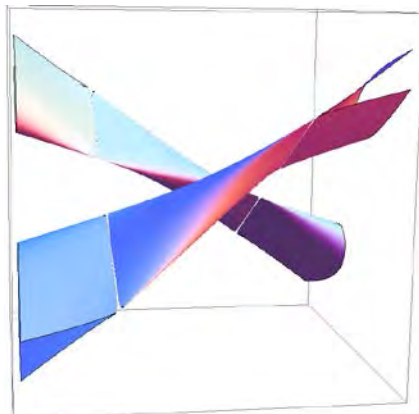
Una ecuación en homogéneas es:

$$(x^2z^2 + y^2w^2) + (x^2w^2 + y^2z^2) + 5cxyzw = 0$$

Otra ecuación en cartesianas es

$$16 - 12x^2 + x^4 - 8y^2 + 7x^2y^2 + y^4 - 32xyz + 112z^2 - 8x^2z^2 - 12y^2z^2 + 16z^4 = 0$$

Dibujo en Mathematica



Serie XX, Nr 4

Helicoide recto cerrado (espiral plana)



No se conserva la etiqueta original

Información matemática

Una superficie helicoidal está generada por una curva (generatriz) que gira con un movimiento de tornillo en torno a un eje. En este caso la generatriz es una recta perpendicular al eje que lo corta en un punto. Las generatrices están en hilo amarillo y el eje en hilo rojo.

Su ecuación matemática es:

$$\begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v, \\ z = v \end{cases} \quad -\pi \leq u \leq \pi, \quad -\pi \leq v \leq \pi,$$

La superficie está limitada en el modelo por un cilindro coaxial.

En Mathematica

